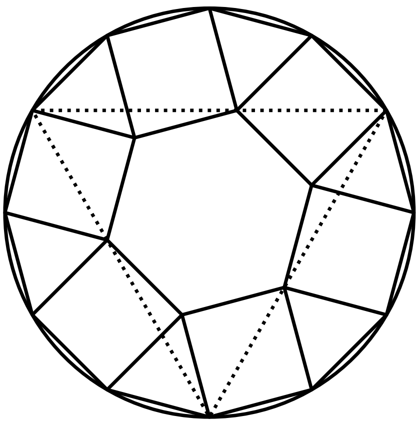
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2024–2025

Úrslitakeppni

Svör og lausnir



Dæmi 1

Gefin eru tíu hólf með níu tölum, aftasta hólfið er tómt. Hægt er að færa tölu úr sínu hólfi í tóma hólfið. Þetta er talin ein aðgerð. Eftir það er hólfið sem talan var í orðið tómt. Upphaflega er röð talnanna $8, 7, 3, 9, 1, 5, 2, 6, 4$. Hvað þarf margar aðgerðir í minnsta lagi til að fá tölurnar í vaxandi röð, með tóma hólfið aftast aftur. Hvers vegna er ekki hægt að gera það í færri aðgerðum en svo?

Lausn

Við lítum á talnarununa sem umröðun, þ.e.a.s. sem stokkun á upphaflegu réttu röðinni. Þá lítum við svo á að 1 verði 8, 2 verði og 7 og svo framvegis. Þá sjáum við að 1 fer í 8, 8 fer í 6, 6 fer í 5 og 5 fer í 1. Þetta köllum við rás. Sjáum að fyrir rás í umröðuninni er ekki hægt að færa neina tölu á réttan stað fyrir en ein hreyfing er notuð til að brjóta upp rásina. Því er lágmarksfjöldi hreyfinga sem þarf að minnsta kosti fjöldi staka sem eru ekki á réttum stað plús fjöldi rása sem þau mynda.

En sá fjöldi hreyfinga dugar, fyrir hverja rás færum við eitt stak á auða reitinn, rekjum upp rásina og lögum hana eitt stak í einu, og færum loks stakið sem við færðum upphaflega á sinn stað.

Það eru 8 stök sem eru ekki á réttum stað og þær mynda þrjár rásir $(1, 8, 6, 5)$, $(7, 2)$, $(9, 4)$. Þar með er svarið 11. $\square$

Dæmi 2
Finnið allar jákvæðar rauntölur x þannig að

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+91} = 91.$$

Lausn 1
Margföldum í gegn með $\sqrt{x+91} - \sqrt{x}$ og fáum

$$x + 91 - x = 91(\sqrt{x+91} - \sqrt{x})$$

Styttum og einföldum til að fá

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+91} = -1$$

Leggjum þetta saman við upphaflegu jöfnuna og fáum:

$$2 \cdot \sqrt{x} = 90$$

Sem eftir einföldun gefur

$$\sqrt{x} = 45$$

Þar með er $x = 45^2 = 2025$ eina mögulega lausnin, og við sjáum með innsetningu að þetta er lausn á upphaflegu jöfnunni. $\square$

Lausn 2
Athugum að stærðin $\sqrt{x} + \sqrt{x+91}$ vex þegar x vex svo jafnan

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+91} = 91$$

hefur í mesta lagi eina lausn í x. Við gætum giskað á að lausnin sé $x = 2025 = 45^2$, þar sem $2025 + 91 = 2116 = 46^2$ og $91 = 45 + 46$. $\square$

Dæmi 3
Gefinn er ferhyrningur $ABCD$. Látum X vera skurðpunkt hornalína hans og gerum ráð fyrir að X sé innan í $ABCD$. Látum $[PQR]$ tákna flatarmál þríhyrningsins með hornpunkta P, Q og R. Sýnið að

$$[ABX] \cdot [DCX] = [BCX] \cdot [DAX].$$

Lausn 1
Látum h vera fjarlægð A frá línunni BD. Þá er h lengd hæðar þríhyrninganna ABX og ADX á grunnhliðarnar BX og DX í þessari röð. Því er

$$[ABX] = \frac{1}{2}|BX| \cdot h \qquad \text{og} \qquad [ADX] = \frac{1}{2}|DX| \cdot h$$

svo

$$\frac{[ABX]}{[ADX]} = \frac{|BX|}{|DX|}.$$

Eins fæst að

$$\frac{[CBX]}{[CDX]} = \frac{|BX|}{|DX|}.$$

Við fáum því að

$$\frac{[ABX]}{[ADX]} = \frac{[CBX]}{[CDX]}$$

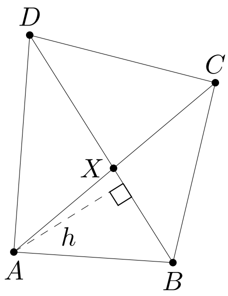
sem umrita má sem

$$[ABX] \cdot [CDX] = [CBX] \cdot [ADX].$$

sem er það sem við áttum að sanna. □

Lausn 2
Sýnum fyrst hjálparsetningu. Látum ΔABC vera þríhyrning og α hornið punktinn A. Þá er $2[ABC] = |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\alpha)$. Hér táknar $|XY|$ lengd striksins frá X til Y.

Teiknum hæð frá B að AC, táknum skurðpunktinn við AC með H. Þá fæst að þar sem ΔABH er rétthyrndur er $\sin(\alpha) = |BH| \,/\, |AB|$. Vitum einnig að $2[ABC] = |AC| \cdot |BH|$, því $|AC| \cdot |BH|$ gefur flatarmál rétthyrnings



og flatarmál ΔABC er helmingurinn af því. Með því að stinga þessar formúlur hvor inn í aðra fæst hjálparsetning okkar.

Táknum hornið milli AX og BX með β. Þar sem hornið milli CX og DX er topphorn þess er það einnig β. Næst er hornið milli BX og CX grannhorn þess, svo það er $180° - \beta$. Eins fæst að hornið mili AX og DX sé $180° - \beta$.

Einföldum nú formúlu dæmisins með því að stinga inn hjálparsetningu okkar fjórum sinnum. Vinstri hliðin verður

$$\frac{1}{2}\,|AX|\,|BX|\sin(\beta)\cdot\frac{1}{2}\,|DX|\,|CX|\sin(\beta)$$

og hægri hliðin verður

$$\frac{1}{2}\,|BX|\,|CX|\sin(180° - \beta)\cdot\frac{1}{2}\,|AX|\,|DX|\sin(180° - \beta)$$

Notum $\sin(180° - \beta) = \sin(\beta)$ og þá höfum við sömu liði, bara í ólíkri röð, svo sönnun er lokið. $\square$

Dæmi 4

Fjölskyldan hans Benna, sem er $n \geq 1$ manna fjölskylda, horfir reglulega á þætti saman. Hvað þau horfa á fer eftir hverjir eru viðstaddir, svo úthluta þarf sérhverju (ekki tómu) hlutmengi fjölskyldunnar þætti til að horfa á. Til að forðast endurtekningu mega tvö hlutmengi ekki horfa á sömu þættina ef þau skarast. Hvað þarf fjölskyldan að finna margar þáttaraðir í minnsta lagi?

Lausn

Hægt er að nota 2^{n-1} þáttaraðir með því að láta sérhvert hlutmengi A horfa á sömu þáttaröð og fyllimengi þess A^C. Sýnum að ekki sé hægt að gera betur.

Skoðum öll hlutmengi sem Benni tilheyrir. Þau eru 2^{n-1} talsins því hann er í helmingi þeirra. Benni tilheyrir þeim öllum þá þarf að úthluta þeim öllum ólíka þætti. Þetta sýnir að við þurfum að minnsta kosti 2^{n-1} þætti.

$\square$

Dæmi 5

Látum heiltölu $m \geq 3$ vera gefna. Köllum heiltölu x *góða* ef $m \mid (x-1)$ og $m(m-1) \mid x(x-1)$. Hér táknar $a \mid b$ að a deili b án afgangs, sem sagt að a gengur upp í b. Við segjum að a deilir b ef til er heiltala k þannig að $b = a \cdot k$. Hvað eru margar góðar tölur stærri en 0 og minni en $m(m-1)$ ef $m = 2025$? En hvað með almennt m?

Lausn

Athugum að fyrst $m \mid x-1$ er til heiltala k þannig að $x = km+1$. Sjáum svo að umrita má $m(m-1) \mid x(x-1)$ sem

$$x(x-1) \equiv 0 \pmod{m(m-1)}$$

Stingum inn gildi okkar fyrir x og fáum þá

$$km(km+1) \equiv 0 \pmod{m(m-1)}$$

Getum þá stytt út m og fengið

$$k(km+1) \equiv 0 \pmod{m-1}$$

En nú er $m \equiv 1 \pmod{m-1}$ svo þetta verður

$$k(k+1) \equiv 0 \pmod{m-1}$$

Frumþáttum $m-1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$ og látum i vera einhvern vísi milli 1 og r. Þá fæst að

$$k(k+1) \equiv 0 \pmod{p_i^{e_i}}$$

Ef p_i deilir k getur p_i ekki deilt $k+1$ því mismunur þeirra er 1 og $p_i > 1$. Því fæst að annað hvort gildir $p_i^{e_i} \mid k$ eða $p_i^{e_i} \mid k+1$. Því hefur þessi formúla nákvæmlega 2 lausnir $\pmod{p_i^{e_i}}$, nefnilega 0 og -1.

Skv. kínversku leifasetningunni hefur þá upphaflega formúlan okkar 2^r lausnir. Þar með er svarið 2^r þar sem r er fjöldi ólíkra frumþátta $m-1$.

Frumþáttum til að fá $2025 - 1 = 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Þar með eru $2^3 = 8$ góðar tölur í þessu sértilfelli. $\square$

Dæmi 6

Festum heila tölu $k > 0$. Finnið öll föll $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ þannig að fyrir öll $n > 0$ gildi

$$f(f(n)) = n + k.$$

Lausn

Skoðum fyrst stæðuna $f(f(f(n)))$. Ef við stingum inn $f(n)$ í stað n í upphaflegu formúluna fæst $f(f(f(n))) = f(n) + k$. En ef við beitum f beggja vegna í upphaflegu formúlunni fæst $f(f(f(n))) = f(n + k)$. Þar með fæst fyrir öll $n > 0$ að $f(n+k) = f(n) + k$. Köllum þessa formúlu $\star$.

Þar með fæst að ef við ákvörðum gildi $f(x)$ fyrir $x \leq k$ þá ákvarðar $\star$ gildin á f fyrir öll önnur x. Athugum að þar sem $f(f(n)) = n+k$ og $n+k$ getur tekið gildi í öllum leifaflokkum k, þá verður f að geta tekið gildi í öllum leifaflokkum k. En ef $f(n + k) = f(n) + k$ sést að $f(n + k)$ er samleifa $f(n)$ með tilliti til k. Þar með verða gildin $f(1), \ldots, f(k)$ að innihalda alla leifaflokka k. En það eru k leifaflokkar hér og k gildi, svo $f(1), \ldots, f(k)$ verða að hafa ólíkar leifar með tilliti til k.

Viljum sýna næst að $f(n) \leq 2k$ fyrir öll $n \leq k$. Gerum ráð fyrir að svo sé ekki til að sýna fram á mótsögn. Upphaflega formúlan segir þá $f(f(n)) = n+k$. Stingum inn $\star$ tvisvar til að fá $f(f(n)) = f(f(n)-2k)+2k = n+k$. Vitum að $f(x) > 0$ fyrir öll x, svo nú er vinstri hliðin $f(f(n)-2k)+2k > 2k$ en hægri hliðin er $n + k \leq 2k$ skv. forsendu. Þar með fæst mótsögn, svo $f(n) \leq 2k$ fyrir öll $n \leq k$.

Við vitum að gildi f á $1, \ldots, k$ stokkar leifaflokkunum með tilliti til k og hvert gildi er annað hvort leifin eða leifin plús k. Allar mögulegar lausnir eru því á þessu formi, svo lát π vera umröðun á $1, 2, \ldots, k$ og U vera hlutmengi í $1, 2, \ldots, k$. Þá fæst ein möguleg lausn með

$$f(n) = \begin{cases} f(n-k) + k \text{ ef } n > k \\ \pi(n) + k \text{ ef } n \in U \\ \pi(n) \text{ annars} \end{cases}$$

fyrir þetta π, U. Skoðum upphaflegu formúluna modulo k og fáum

$$f(f(n)) = n + k \Leftrightarrow \pi(\pi(n)) \equiv n$$

Því verður $\pi(\pi(n)) = n$ að gilda fyrir öll n til að þetta sé gild lausn. Sjáum eins með innsetningu að $x \in U$ þá og því aðeins að $\pi(x) \notin U$. Því getum við ekki haft $\pi(x) = x$. Þar með er π spyrðing á $1, 2, \ldots, k$, svo ef k er odda er engin lausn.

Gerum þá ráð fyrir að k er slétt, π er spyrðing á $1, 2, \ldots, k$ og að $x \in U$ þá og því aðeins að $\pi(x) \notin U$. Með innsetningu fæst þá að fallið f skilgreint að ofan er lausn á formúlunni, og eru allar lausnir á því formi. $\square$